

11 集合と論証

96

$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$ より, $\overline{P \cap Q}$ の要素 x は $\left|x - \frac{13}{2}\right| < 3$ または $x^2 + 18x + 79 < 0$

すなわち $\frac{7}{2} < x < \frac{19}{2}$ または $-9 - \sqrt{2} < x < -9 + \sqrt{2}$ $\cdots$ ①

R の要素 x は, $|x| \leq \frac{a}{2}$ より, $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ $\cdots$ ②

ただし, $0 \leq |x| \leq \frac{a}{2}$ より, $a \geq 0$ $\cdots$ ③

①, ②, ③より, $-\frac{a}{2} \leq -9 - \sqrt{2}$ かつ $\frac{19}{2} \leq \frac{a}{2}$ すなわち $a \geq 18 + 2\sqrt{2}$ かつ $a \geq 19$

よって, $a \geq 18 + 2\sqrt{2}$

これと, $20 < 18 + 2\sqrt{2} < 21$ より, 求める整数 a の値は 21

97

(1)

$(x+y)^2 \leq (xy+1)^2$ すなわち $(xy+1)^2 - (x+y)^2 \geq 0$ について,

$$\begin{aligned} (xy+1)^2 - (x+y)^2 &= (xy+1+x+y)(xy+1-x-y) \\ &= \{(x+1)(y+1)\}\{(x-1)(y-1)\} \\ &= (x^2-1)(y^2-1) \end{aligned}$$

より, $(x^2-1)(y^2-1) \geq 0$

よって, $x^2 \leq 1$ かつ $y^2 \leq 1$ は $(x+y)^2 \leq (xy+1)^2$ であるために十分条件である。

これと, $x^2 \leq 1$ かつ $y^2 \leq 1$ は $|x| \leq 1$ かつ $|y| \leq 1$ と同値であることから, 命題は真である。

(2)

偽

反例は $a=b=0, c=1$, $a=-1, b=2, c=-3$ など

98

(1)

必要条件でも十分条件でもない。

解説

命題: n が奇数 $\rightarrow \sqrt{n}$ は無理数

偽 反例: $n=1$

命題: $\sqrt{n}$ が無理数 $\rightarrow n$ は奇数

偽 反例: $n=2$

(2)

必要十分条件である。

解説

命題： n が整数の 2 乗でない。 $\rightarrow \sqrt{n}$ は無理数である。

命題の対偶「 $\sqrt{n}$ が有理数 $\rightarrow n$ は整数の 2 乗である」の真偽について、

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素}) \text{ とおくと, } n = \frac{p^2}{q^2}$$

p と q は互いに素だから、 p^2 と q^2 も互いに素である。

これと n は整数であることから、 $q^2 = 1$

よって、 $n = p^2$ すなわち n は整数の 2 乗である。

ゆえに、命題の対偶は真であり、これより、命題は真である。

命題： $\sqrt{n}$ は無理数である。 $\rightarrow n$ が整数の 2 乗でない。

命題の対偶「 n は整数の 2 乗である $\rightarrow \sqrt{n}$ は有理数である」の真偽について、

$$n = p^2 \quad (p \text{ は整数}) \text{ とすると } \sqrt{n} = \sqrt{p^2} = |p| \text{ より, } \sqrt{n} \text{ は有理数である。}$$

よって、命題の対偶は真であり、これより、命題は真である。

99

(1)

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素な自然数}) \text{ とすると, } p = \frac{a^2}{b^2}$$

a と b は互いに素な自然数だから、 a^2 と b^2 も互いに素な自然数である。

$b^2 \neq 1$ のとき

p は整数でないから、素数でない。

$b^2 = 1$ のとき

$p = a^2$ より、 p は素数でない。

以上より、 p は素数でない。

これは p が素数であることと矛盾する。

よって、背理法により、命題は真である。

(2)

$$m\sqrt{p} + n\sqrt{q} = -k \text{ より, } m^2p + n^2q + 2mn\sqrt{pq} = k^2 \quad \therefore 2mn\sqrt{pq} = k^2 - m^2p - n^2q$$

$$mn \neq 0 \text{ とすると, } \sqrt{pq} = \frac{k^2 - m^2p - n^2q}{2mn} \text{ より, } \sqrt{pq} \text{ は有理数}$$

ところが、 p と q は異なる素数だから、 $\sqrt{pq}$ は無理数である。

よって、 $mn = 0$ すなわち $m = 0$ または $n = 0$

$m=0$ のとき

$$k+n\sqrt{q}=0 \text{ かつ } \sqrt{q} \text{ は無理数より, } k=n=0$$

$n=0$ のとき

$$k+m\sqrt{p}=0 \text{ かつ } \sqrt{p} \text{ は無理数より, } k=m=0$$

以上より, $k=m=n=0$

100

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\begin{aligned} 3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2 &= 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx \\ &= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって,

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$$

等号成立は $x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$ のとき すなわち $x=y=z$ のとき

$$x^2+y^2+z^2 \leq a \text{ ならば } x+y+z \leq a$$

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2), \quad x^2+y^2+z^2 \leq a \text{ より,}$$

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \leq 3a \quad \therefore -\sqrt{3a} \leq x+y+z \leq \sqrt{3a}$$

よって, 命題が真となるための条件は $\sqrt{3a} \leq a$

$$0 \leq \sqrt{3a} \leq a \text{ より, } 3a \leq a^2 \quad \therefore a(a-3) \geq 0$$

これと $a > 0$ より, $a \geq 3$

よって, a の最小値は 3

101

命題 p

正しくない。

理由

$$\sqrt{n} \text{ を有理数とし, } \sqrt{n} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数}) \text{ と表す。}$$

$$\text{この両辺を 2 乗すると, } n = \frac{p^2}{q^2}$$

p と q は互いに素な自然数だから, p^2 と q^2 も互いに素な自然数である。

$$\text{これと } n \text{ は自然数であることから, } q^2 = 1 \quad \therefore n = p^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{よって, } \sqrt{n+1} = \sqrt{p^2+1}$$

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{p^2+1} \text{ も有理数とし, } \sqrt{p^2+1} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数}) \text{ と表すと,}$$

$$\text{上と同様にして, } p^2+1 = m^2 \quad \therefore (m+p)(m-p) = 1$$

p, m は自然数だから, $p + m = 1$ かつ $p - m = 1$

ところが $m > p \geq 1$ より, $p + m \geq 3$

よって, 不適

ゆえに, $\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数となることはない。

すなわち, 命題 p は正しくない。

補足

あるいは, $p + m = 1$ かつ $p - m = 1$ を解くと, $p = 1, m = 0$ となり不適

命題 q

正しい。

理由

命題 q の否定は, 「ある n に対して, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ は有理数である」である。

このとき, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = r$ (r は正の有理数) と表せる。

すると, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ より, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \frac{1}{r}$

よって, 連立方程式
$$\begin{cases} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = r \\ \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \frac{1}{r} \end{cases}$$
 を解くことにより,

$$\sqrt{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right), \quad \sqrt{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right)$$

すなわち, $\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数となる。

これは, 命題 p が偽であることと矛盾する。

よって, 命題 q の否定は偽である。

ゆえに, 命題 q は正しい。